ALGEBRA 3 - PRÁCTICO 7

Ejercicio 1. Probar que $A \in M_2(\mathbb{R})$ es ortogonal si y sólo si
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \qquad \text{ó} \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$
donde $a^2 + b^2 = 1$.

Ejercicio 2. Probar que una matriz $A \in M_2(\mathbb{C})$ es unitaria si y sólo si es de la forma
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$$
donde $\theta \in \mathbb{R}$ y $a, b \in \mathbb{C}$ con $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

Ejercicio 3. Encontrar una matriz unitaria que no sea ortogonal, y una ortogonal que no sea unitaria.

Ejercicio 4. Sea $V = M_n(\mathbb{C})$ con el producto interno $(A|B) = \text{tr}(AB^*)$. Para cada M sea T_M el operador multiplicar a izquierda por M. Probar que T_M es unitario si y sólo si M es una matriz unitaria.

Ejercicio 5. Sea V el espacio $\mathbb{C}$ considerado como espacio vectorial real.

(a) Probar que $(\alpha|\beta) = Re(\alpha\overline{\beta})$ define un producto interno en V.
(b) Dar un isomorfismo de espacios producto interno entre V y $\mathbb{R}^2$ con el producto interno canónico.
(c) Para cada $\gamma \in V$, sea M_γ el operador definido por $M_\gamma(\alpha) = \gamma\alpha$. Probar que $(M_\gamma)^* = M_{\overline{\gamma}}$.
(d) ¿Para qué números complejos γ es M_γ autoadjunta?
(e) ¿Para cuáles γ es M_γ unitaria?
(f) Encontrar la matriz de M_γ en la base $\{1, i\}$.
(g) Si T es un operador lineal en V, hallar condiciones necesarias y suficientes para T para que sea un M_γ.

Ejercicio 6. Sea $V = \mathbb{R}^2$ con el producto interno canónico. Si U es un operador unitario sobre V, probar que la matriz de U en la base ordenada canónica es de la forma:
$$U_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{o} \qquad V_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \quad \text{para algún } \theta \text{ real.}$$

(a) Notar que U_θ es, una rotación de ángulo θ y observar que todo operador unitario en V es una rotación o una reflexión seguida de una rotación.
(b) ¿Qúe es $U_\theta U_\phi$?
(c) Probar que $U_\theta^* = U_{-\theta}$.
(d) Sea ϕ un número real fijo, y sea $B = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ la base ortonormal que se obtiene al rotar la base canónica en un ángulo ϕ. ¿Cúal es la matriz de U_θ en la base B?

Ejercicio 7. Sea $V = \mathbb{R}^2$ con el producto interno usual. Sea W el plano generado por $\alpha = (1, 1, 1)$ y $\beta = (1, 1, -2)$. Sea U la transformación lineal definida geométricamente como una rotación de ángulo θ alrededor de la recta ortogonal a W que pasa por el origen.

Hallar la matriz de U en la base canónica.
Ayuda: Hallar w_1, w_2 una base ortonormal de W y w_3 un vector de norma 1 ortogonal a W. Hallar la matriz de U en esa base y luego hacer el cambio de base.

Ejercicio 8. Demostrar que $\left(\begin{smallmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{smallmatrix}\right)$ y $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0\\ 0 & e^{-i\theta}\end{pmatrix}$ son unitariamente equivalentes para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 9. Sea V un espacio producto interno de dimensión finita. Para cada α, β en V, sea $T_{\alpha,\beta}$ el operador lineal en V definido por $T_{\alpha,\beta}(\gamma) = (\gamma|\beta)\alpha$. Demostrar que

(a) $T^*_{\alpha,\beta} = T_{\beta,\alpha}$.
(b) $\text{traza}(T_{\alpha,\beta}) = (\alpha|\beta)$.
(c) $T_{\alpha,\beta}T_{\gamma,\delta} = T_{\alpha,(\beta|\gamma)\delta}$.
(d) ¿En qué condiciones es $T_{\alpha,\beta}$ autoadjunto?

Ejercicio 10. Sea V un espacio producto interno de dimensión finita y sea W un subespacio de V. Entonces $V = W \oplus W^\perp$, esto es, todo α de V se expresa unívocamente en la forma $\alpha = \beta + \gamma$, con β en W y γ en $W^\perp$. Se define un operador lineal U por $U(\alpha) = \beta - \gamma$.

(a) Interpretar geométricamente.
(b) Demostrar que U es autoadjunto y unitario.
(c) Si V es $\mathbb{R}^3$ con el producto internocanónico y $W = \langle(1,0,1)\rangle$, hallar la matriz de U en la base ordenada canónica.
(d) Probar que no existen otros operadores y unitarios. (todo operador autoadjunto y unitario proviene de algún subespacio W).

Ejercicio 11. Si V es un espacio producto interno, un *movimiento rígido* en V es una función $T : V \longrightarrow V$ (no necesariamente lineal) tal que $\|T\alpha - T\beta\| = \|\alpha - \beta\|$, para todo $\alpha, \beta \in V$. (por ejemplo un operador unitario o una trasalación).

(a) Sea $V = \mathbb{R}^2$ con el producto interno usual. Sea T un movimiento rígido tal que $T(0) = 0$. Probar que T es lineal y unitario.
(b) Probar que todo movimiento rígido de $\mathbb{R}^2$ es composición de una traslación seguida de un operador unitario.
(c) Probar que todo movimiento rígido de $\mathbb{R}^2$ es o bien una traslación seguida de una rotación o una traslación seguida de una reflexión seguida de una rotación.

Ejercicio 12. Para cada una de las siguientes matrices reales A, hallar una matriz ortogonal real P tal que P^tAP sea diagonal

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}.$$

Ejercicio 13. Sea $V = \mathbb{C}^2$ con el producto interno canónico. Sea T el operador lineal sobre V representado en la base canónica por

$$A = \begin{pmatrix}1 & i\\ i & 1\end{pmatrix}.$$

Demostrar que T es normal y hallar una base ortogonal de V que consista en vectores propios de T.

Ejercicio 14. Dar una matriz A, 2×2, tal que A^2 sea normal pero A no lo sea.

Ejercicio 15. Sea T un operador en un espacio producto interno de dimensión finita.

(a) Si T es unitario y positivo probar que $T = I$.
(b) Si T es normal y nilpotente probar que es el operador nulo.

Ejercicio 16. Demostrar que T es normal si y sólo si $T = T_1 + iT_2$ donde T_1 y T_2 son operadores autoadjuntos que conmutan.

Ejercicio 17. Probar que toda matriz simétrica real A tiene una raíz cúbica simétrica real, es decir existe B simétrica real tal que $B^3 = A$.

Ejercicio 18. Sea A una matriz compleja $n \times n$ tal que $A^* = -A$. Sea $B = e^A$. Probar que

(a) $\det B = e^{\mathrm{tr}\ A}$.
(b) $B^* = e^{-A}$.
(c) B es unitaria.

Ejercicio 19. Si U y T son operadores normales que conmutan, demostrar que $U + T$ y UT son normales.

Ejercicio 20. Sea V un espacio producto interno complejo de dimensión finita y sea U un operador unitario sobre V tal que $U\alpha = \alpha$ implique que $\alpha = 0$. Sea

$$f(z) = i\,\frac{1+z}{1-z}, \qquad z \neq 1.$$

Demostrar que

(a) $f(U) = i(I + U)(I - U)^{-1}$;
(b) $f(U)$ es autoadjunto; y
(c) para todo operador autoadjunto T sobre V, el operador

$$U = (T - iI)(T + iI)^{-1}$$

es unitario y tal que $T = f(U)$.

Ejercicio 21. Sea T un operador lineal en V, un espacio vectorial complejo de dimensión finita. Probar que las siguiente condiciones son equivalentes.

(a) T es normal.
(b) $\|T\alpha\| = \|\alpha\|$, para todo $\alpha \in V$.
(c) Si $\alpha \in V$, $c \in \mathbb{C}$ tal que $T\alpha = c\alpha$ entonces $T^*\alpha = \bar{c}\alpha$.
(d) Existe una base ortonormal de V formada por vectores propios de T.
(e) Todo espacio T-invariante es T^*-invariante.
(f) $T = NU$ donde N es no negativa, U unitaria y $NU = UN$.
(g) $T = c_1E_1 + \cdots + c_kE_k$, donde $I = E_1 + \cdots + E_k$, $E_iE_j = 0$ $(i \neq j)$, $E_j^2 = E_j = E_j^*$.

Ejercicio 22. Sea $V = M_n(\mathbb{C})$ con el producto interno

$$(A|B) = \mathrm{tr}(AB^*).$$

Si $B \in V$, sean L_B, R_B y T_B los operadores lineales sobre V definidos por $L_B(A) = BA$; $R_B(A) = AB$; $T_B(A) = BA - AB$.

(a) Considerar las 3 familias de operadores que se obtienen al hacer variar B sobre todas las matrices diagonales. Demostrar que cada una de estas familias es un álgebra autoadjunta conmutativa y hallar sus descomposiciones espectrales.
(b) Probar que L_B es unitariamente equivalente a R_B.